Géométrie des surfaces

Nappes paramétrées

Exercice 1 [00633] [correction]
Former une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier quelconque de la nappe paramétrée par
$$\begin{cases} x = \text{sh}u \\ y = \text{sh}v \\ z = u + v \end{cases}$$

Exercice 2 [00634] [correction]
Former une équation cartésienne du support de la nappe paramétrée par
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Exercice 3 [00635] [correction]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et Σ la surface définies par :
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = f(r,\theta) \end{cases}$$
Déterminer pour tout point régulier de Σ, l'intersection de (Oz) et du plan tangent en ce point.

Surfaces

Exercice 4 [00636] [correction]
Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation
$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$
a) A quelle condition l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $z = k$ contient-elle une droite ?
b) Déterminer les droites incluses dans $\mathcal{S}$ non parallèles à (xOy).
c) Montrer que celles-ci sont coplanaires.
d) Déterminer le plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

Exercice 5 [00637] [correction]
Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface $\Sigma : z^3 = xy$ qui contiennent la droite d'équations :
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3(z+1) \end{cases}$$

Exercice 6 [00638] [correction]
Former une équation cartésienne de la surface Σ réunion des droites coupant
$$D_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \text{ et } D_3 : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 [00639] [correction]
Former une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de génératrice
$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$
(avec $a > 0$) et de direction $\vec{j}$.

Exercice 8 [00640] [correction]
Former une équation cartésienne du cône Σ de sommet $A(1,0,1)$ et de directrice
$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 [00641] [correction]
Former une équation du cône de révolution $\mathcal{C}$ de sommet O, d'axe $\Delta : x = y = z$ et de demi-angle au sommet $\pi/3$.

Exercice 10 [00642] [correction]
Former une équation de la surface de révolution $\mathcal{S}$ obtenue par rotation du cercle Γ de centre $\Omega(a,0,0)$ et de rayon $r > 0$ du plan (xOy) autour de l'axe (Oy).

Exercice 11 [00643] [correction]
Former une équation de la surface de révolution $\mathcal{S}$ obtenue par la rotation de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = -t^2 \end{cases}$ autour de la droite $\Delta : x = y = z$.

Exercice 12 [00644] [correction]
Nature de l'intersection de deux cylindres de révolution isométriques d'axes perpendiculaires.

Exercice 13 [00645] [correction]
Soit $\Sigma : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1 = 0$. Montrer que Σ est une surface de révolution.

Exercice 14 [00410] [correction]
a) Que représentent $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ et $S_2 : y^2 + 4z^2 = 1$?
b) Soient les plans $P_1 : 2z - x = 0$ et $P_2 : 2z + x = 0$. Démontrer que

$$C = S_1 \cap S_2 = (S_2 \cap P_1) \cup (S_2 \cap P_2)$$

c) Vérifier que $A(1, 0, 1/2)$ et $B\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/4\right)$ appartiennent à C.
d) Calculer les tangentes à C en A et B, puis la perpendiculaire commune aux deux tangentes

Quadriques

Exercice 15 [00646] [correction]
Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma : z = xy$$

Donner une équation de son plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 16 [00647] [correction]
Nature de la quadrique

$$\Sigma : z^2 = \lambda + x^2 + y^2$$

selon le paramètre λ.

Exercice 17 [00648] [correction]
Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma : xy + yz + zx = 0$$

Exercice 18 [00649] [correction]
Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2zx - 6yz - 8x + 4y + 8z = \lambda$$

avec $\lambda = 3, 4$ ou 5

Exercice 19 [00650] [correction]
Soit Σ la surface d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
a) Reconnaître Σ.
b) Montrer que les intersections de Σ avec des plans horizontaux sont des ellipses de même excentricité.

Exercice 20 [00651] [correction]
a) Déterminer la nature de la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2$$

b) Par un point donné de cette surface, combien y a-t-il de droites passant par ce point et entièrement incluse dans cette surface ?
c) Quel est le lieu des points où ces droites sont orthogonales ?

Exercice 21 [00652] [correction]
a) Déterminer la nature de la surface Σ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

b) Montrer que par tout point de Σ passent exactement deux droites tracées sur Σ.

Exercice 22 [00653] [correction]
Soit Σ une quadrique de centre O. Montrer que tout plan passant par l'origine coupe Σ en des points pour lesquels les plans tangents sont parallèles à une droite commune.

Exercice 23 [00654] [correction]
a) Former une équation cartésienne de la surface obtenue par révolution de la droite (Oz) autour de l'axe

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = y \end{cases}$$

b) Reconnaître la surface obtenue.

Exercice 24 [00655] [correction]
Une droite $\mathcal{D}$ n'est pas orthogonale à l'axe (Oz).
Quelle est la surface décrite par $\mathcal{D}$ en rotation autour de l'axe (Oz) ?

Exercice 25 [00656] [correction]
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires. Quel est le lieu des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$? On pourra commencer par introduire Δ la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 26 Mines-Ponts MP [02935] [correction]
Reconnaître la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2$$

Exercice 27 Mines-Ponts MP [02936] [correction]
Soit a un réel. Déterminer la surface balayée par les droites parallèles au plan $y + z = 0$ qui coupent les droites $\{x + y = a; z = 0\}$et $\{z = a; x = 0\}$.

Exercice 28 Mines-Ponts MP [02937] [correction]
Reconnaître et réduire la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$$

Exercice 29 Mines-Ponts MP [02938] [correction]
Reconnaître, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la quadrique d'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy + 2xz - 8yz + \alpha x + 2y - z = 1$$

Exercice 30 Mines-Ponts MP [03202] [correction]
Montrer que la surface d'équation

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 14 = 0$$

est un cylindre dont on précisera l'axe et le rayon.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

$$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}\,(-\mathrm{ch}u,-\mathrm{ch}v,\mathrm{ch}u\mathrm{ch}v)\neq\vec{0}$$

On en déduit l'équation

$$\mathrm{ch}(v)x+\mathrm{ch}(u)y-\mathrm{ch}(u)\mathrm{ch}(v)z=\mathrm{sh}(u+v)-\mathrm{ch}(u)\mathrm{ch}(v)(u+v)$$

Exercice 2 : [énoncé]
Pour un point de cette surface, on remarque $x^2=z+2y$.
Inversement un point vérifiant cette équation appartiendra au paramétrage si, et seulement si, il existe $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x=u+v$ et $y=uv$. Cela est possible si, et seulement si, $\Delta=x^2-4y\geqslant 0$.
Ainsi $x^2=z+2y$ avec la condition $x^2\geqslant 4y$ forme une équation cartésienne de la surface.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\wedge\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r},-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta},r\right)$$

et le plan tangent a pour équation :

$$\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right)x-\left(r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)y+rz=rf(r,\theta)-r^2\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$$

Ce plan coupe l'axe (Oz) à la hauteur $z=f(r,\theta)-r\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) Soient $\mathcal{D}$ une droite incluse dans $\mathcal{S}$ et le plan $z=k$. On a $x^3+y^3=1-k^3$.
Si la droite est parallèle à $(y'Oy)$ alors $x=C^{te}$ et y quelconque ce qui est impossible.
Sinon la droite est $y=ax+b$ ce qui donne $(1+a^3)x^3+3a^2bx^2+3ab^2x=1-k^3$ donc
$k=1,a=-1$ et $b=0$ ce qui donne $\mathcal{D}_1:A(0,0,1)+\mathrm{Vect}(\vec{u}(1,-1,0))$.
b) Soit $\mathcal{D}$ une droite incluse dans $\mathcal{S}$ et non parallèle à (xOy). On peut la paramétrer par $\begin{cases}x=x_0+az\\y=y_0+bz\end{cases}$ qui dans l'équation donne :
$x_0^3+y_0^3+(3x_0^2a+3y_0^2b)z+(3x_0a^2+3y_0b^2)z^2+(1+a^3+b^3)z^3=1$ pour tout $z\in\mathbb{R}$ donc :
Par identification : $a^3+b^3=-1\quad(1)$, $a^2x_0+b^2y_0=0\quad(2)$, $ax_0^2+by_0^2=0\quad(3)$ et $x_0^3+y_0^3=1\quad(4)$.
$x_0(2)-a(3)$ donne $b^2x_0y_0-aby_0^2=by_0(bx_0-ay_0)$.
Si $b=0$ alors $a=-1$, $x_0=0$ et $y_0=1$: $\mathcal{D}_2=B(0,1,0)+\mathrm{Vect}(\vec{v}(-1,0,1))$.
Si $y_0=0$ alors $x_0=1$, $a=0$ et $b=-1$: $\mathcal{D}_3=C(1,0,0)+\mathrm{Vect}(\vec{w}(0,-1,1))$.
Sinon $x_0=\frac{a}{b}y_0$ et (4) donne $y_0=-b$, $x_0=-a$ puis une contradiction.
c) Ces droites appartiennent au plan : $x+y+z=1$.
d) Ces droites s'interceptent en $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ et $(1,1,-1)$. Le plan tangent y a pour équation $x+y+z=1$.

Exercice 5 : [énoncé]
Le plans tangent à Σ en $M(x_0,y_0,z_0)$ régulier (i.e. $M\neq O$) a pour équation

$$y_0x+x_0y-3z_0^2z+z_0^3=0$$

Ce plan contient la droite spécifiée si, et seulement si, $A(2,0,-1)$ lui appartient et $\vec{u}(0,3,1)$ appartient à sa direction ce qui conduit au système :

$$\begin{cases}2y_0+3z_0^2+z_0^3=0\\x_0=z_0^2\\x_0y_0=z_0^3\end{cases}$$

qui a pour solutions $(0,0,0)$, $(1,-1,-1)$ et $(4,-2,-2)$.
Les plans tangents cherchés ont alors pour équations : $-x+y-3z=1$ et $x-2y+6z+4=0$.

Exercice 6 : [énoncé]
$A(0,t,1)\in D_1$, $B(u,0,-1)\in D_2$, $C(v,v,0)\in D_3$.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2v\\t=2v\end{cases}$$

La surface Σ formée des droites (AB) i.e. des points $M=A+t\overrightarrow{AB}$ admet alors pour paramétrage :

$$\begin{cases}x=2vt\\y=2v-2vt\\z=1-2t\end{cases}$$

et par élimination on parvient à l'équation $xz+yz+x-y=0$.

Exercice 7 : [énoncé]

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},M+t\vec{j}\in\Gamma$$

Ainsi

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x^2+(y+t)^2+z^2=a^2\\x^2+(y+t)^2=ax\end{cases}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}z^2=a^2-ax\\(y+t)^2=a^2-z^2-x^2\end{cases}$$

puis

$$M(x,y,z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}z^2=a^2-ax\\(y+t)^2=ax-x^2\end{cases}$$

donc

$$\mathcal{C}:z^2+ax=a^2\text{ et }ax\geqslant x^2$$

Notons que la dernière condition peut se simplifier en $x\geqslant 0$ car la première équation entraîne $x\leqslant a$.

Exercice 8 : [énoncé]
$A\in\Sigma$ et pour $M(x,y,z)\neq A$, on a

$$A\in\Sigma\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},A+\lambda\overrightarrow{AM}\in\Gamma$$

Après élimination du paramètre λ dans le système obtenu, on parvient à l'équation

$$x^2+y^2-2xz+2z-1=0$$

Exercice 9 : [énoncé]
$M(x,y,z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow d(M,\Delta)=\frac{1}{2}OM$. Or en notant $\vec{u}(1,1,1)$,
$d(M,\Delta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$. On parvient à l'équation :
$5(x^2+y^2+z^2)-8(xy+yz+zx)=0$.

Exercice 10 : [énoncé]
On peut former un paramétrage du cercle Γ

$$\begin{cases}x=a+r\cos t\\y=r\sin t\\z=0\end{cases}$$

On a

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\exists P\in\Gamma,OM^2=OP^2\text{ et }\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{j}$$

Ainsi

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}2ar\cos t=x^2+y^2+z^2-a^2-r^2\\r\sin t=y\end{cases}$$

Ce système implique

$$4a^2r^2\cos^2t=(x^2+y^2+z^2-a^2-r^2)^2$$

donc

$$4a^2r^2(1-y^2)=(x^2+y^2+z^2-a^2-r^2)^2$$

Inversement, si un point M vérifie cette équation en posant t tel que $r\sin t=y$ et $\cos t$ du signe de $x^2+y^2+z^2-a^2-r^2$, le système précédent est vérifié.
Finalement

$$\mathcal{S}:(x^2+z^2)^2-2(x^2+z^2)(a^2+r^2)+(a^2-r^2)^2+y^4+2y^2(a^2+r^2)=0$$

Exercice 11 : [énoncé]
$M(x,y,z)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\exists P\in\Gamma,OM^2=OP^2$ et $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}$ avec $\vec{u}(1,1,1)$ vecteur directeur de Δ.
Ainsi $M(x,y,z)\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}t^2+2t^4=x^2+y^2+z^2\\t=x+y+z\end{cases}$.
Finalement $\mathcal{S}:(x+y+z)^4+(xy+yz+zx)=0$.

Exercice 12 : [énoncé]
Dans un repère ad hoc, les équations des cylindres sont $x^2+y^2=R^2$ et $x^2+z^2=R^2$. Les points intersections vérifient alors $y^2=z^2$ et sont donc inclus dans les plans d'équations $y=z$ et $y=-z$. L'intersection cherchée apparaît alors comme la réunion des intersections du premier cylindre et des deux précédents plans. Cela conduit à des ellipses de petit axe $b=R$, de grand axe $a=\sqrt{2}R$ et d'excentricité $e=c/a=1/\sqrt{2}$.

Exercice 13 : [énoncé]
Soit $\Pi_\lambda:x+y+z=\lambda$.

$$M(x,y,z)\in\Pi_\lambda\cap\Sigma\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda(x^2+y^2+xy-\lambda x-\lambda y)+\lambda^3-1=0\\x+y+z=\lambda\end{cases}.$$

On observe alors que pour $\lambda = 0$, $\Pi_0 \cap \Sigma = \emptyset$.
Pour $\lambda \neq 0$, en notant $H(\lambda/3, \lambda/3, \lambda/3)$ et $M(x, y, \lambda - x - y) \in \Pi_\lambda$, on a
$M \in \Sigma \Leftrightarrow HM^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2\lambda x - 2\lambda y + \frac{2\lambda^2}{3}$ puis
$M \in \Sigma \Leftrightarrow HM^2 = 2/3\lambda$. Ainsi Σ est une surface de révolution.

Exercice 14 : [énoncé]
a) S_1 est cylindre circulaire de direction $\vec{k}$.
S_2 est un cylindre elliptique de direction $\vec{i}$.
b) On a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4z^2 = 1 \\ x^2 - 4z^2 = 0 \end{cases}$$

En factorisant la deuxième équation, on obtient

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4z^2 = 1 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2 + 4z^2 = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

ce qui fournit l'égalité d'ensemble demandée.
c) C'est immédiat et plus précisément $A \in S_2 \cap P_1$ tandis que $B \in S_2 \cap P_2$.
d) La tangente à C en A est tangente à la courbe $S_2 \cap P_1$, elle est alors incluse dans le plan P_1 et dans le plan tangent à S_2 en A (dont une équation s'obtient par dédoublement)
Un système d'équation définissant cette tangente est alors

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = 1 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

De même, on obtient un système d'équations définissant la tangente à B en C.

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} y - \sqrt{2} z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = \sqrt{2} + 2z \end{cases}$$

Les droites précédentes sont dirigées par

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La perpendiculaire commune à ces deux droites non coplanaires est alors dirigée par $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ avec

$$\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Les plans $A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{n})$ et $B + \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{n})$ déterminent alors cette perpendiculaire commune dont un système d'équation est alors

$$\begin{cases} 2x - z = 3/2 \\ 4x + 5y - 2z = 5\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} 4x - 2z = 3 \\ 5y = 5\sqrt{2} - 3 \end{cases}$$

Exercice 15 : [énoncé]
Σ est un paraboloïde hyperbolique. Son plan tangent en M a pour équation $y_0 x + x_0 y - z = z_0$.

Exercice 16 : [énoncé]
Si $\lambda > 0$, Σ est un hyperboloïde à deux nappes et de révolution (viva zappata).
Si $\lambda = 0$, Σ est un cône.
Si $\lambda < 0$, Σ est un hyperboloïde à une nappe de révolution.

Exercice 17 : [énoncé]
La forme quadratique est de matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $1, -1/2, -1/2$.
En introduisant $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée formée de vecteurs propres associées aux valeurs propres respectives $1, 1, -2$, une équation de Σ dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$$

La surface est un cône de révolution.

Exercice 18 : [énoncé]
Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $3, 6, -2$.

Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base orthonormée telle que la matrice de la forme quadratique y soit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres ne sont pas nulles, on a affaire à une quadrique à centre.
Le centre s'obtient en résolvant :

$$\begin{cases} 10x-2y+2z-8=0 \\ -2x+2y-6z+4=0 \\ 2x-6y+2z+8=0 \end{cases}$$

On obtient $\Omega \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$

Dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, on obtient $3x^2+6y^2-2z^2+k=0$ avec k la valeur en Ω i.e. $k=4-\lambda$.
Si $\lambda=5$, c'est un hyperboloïde à une nappe.
Si $\lambda=4$, c'est un cône.
Si $\lambda=3$, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 19 : [énoncé]
a) Σ est un hyperboloïde à une nappe.
b) $\mathcal{P}: z=\lambda$. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O_\lambda;\vec{i},\vec{j})$ avec $O_\lambda(0,0,\lambda)$, une équation de l'intersection de Σ avec $\mathcal{P}$ est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\lambda^2}{c^2}$. C'est l'équation d'une ellipse où $a'=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}}}$ et $b'=\frac{b}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}}}$. L'excentricité de cette ellipse est $e=\frac{c'}{a'}=\frac{\sqrt{a'^2-b'^2}}{a'}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ indépendante de λ.

Exercice 20 : [énoncé]
a) On reconnaît ici l'équation d'un paraboloïde hyperbolique.
b) Soit $M_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ tel que $z_0=x_0^2-y_0^2$, $\vec{u}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $M(t)=M_0+t.\vec{u}$.
$M(t)$ appartient à la surface si, et seulement si,

$$(-a^2+b^2)t^2+(c-2x_0a+2y_0b)t=0$$

Les seules droites passant par M_0 et incluses dans la surface sont celles dirigées par

$$\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x_0-2y_0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2x_0+2y_0 \end{vmatrix}$$

c) Le lieu des points où ces droites sont orthogonales est la réunion des deux droites d'équations :

$$\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Exercice 21 : [énoncé]
a) Σ est un hyperboloïde à une nappe.
b) Soient $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ point de Σ et $\vec{u}\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$ un vecteur non nul.
La droite $(M;\vec{u})$ est entièrement incluse dans Σ si, et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $M+t\vec{u}\in\Sigma$ ce qui conduit au système

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \\ \alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0=0 \end{cases}$$

Nécessairement $\gamma\neq 0$ et par colinéarité, on peut supposer $\gamma=1$.
On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha x_0+\beta y_0=z_0 \end{cases}$$

Dans le cas où $y_0\neq 0$, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha^2(1+z_0^2)-2\alpha x_0z_0+(x_0^2-1)=0 \\ \beta=(z_0-\alpha x_0)/y_0 \end{cases}$$

qui, après calcul de discriminant possède exactement deux solutions.
Dans le cas où $y_0=0$, nécessairement $x_0\neq 0$ et un raisonnement symétrique permet de conclure.

Exercice 22 : [énoncé]
$\Sigma: \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=\varepsilon$ avec $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Soit $P : ax + by + cz = 0$ en $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma \cap P$, le plan tangent a pour équation $\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z = \varepsilon$ et est de vecteur normal $\vec{n}(\alpha x_0, \beta y_0, \gamma z_0)$. Pour $\vec{u}\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}\right)$, on a $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc toute droite dirigée par $\vec{u}$ est parallèle au plan tangent en M.

Exercice 23 : [énoncé]
a) Notons Σ la surface formée par révolution de (Oz) autour de $\mathcal{D} = (A; \vec{u})$ avec $A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists P \in (Oz), AM = AP \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$$

conduit par élimination à $\Sigma : xy + yz + zx + x = 0$.
b) La surface obtenue est un hyperboloïde à une nappe de révolution de centre $\Omega \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$.

Exercice 24 : [énoncé]
Posons $d = d(\mathcal{D}, (Oz))$. Dans un repère ad hoc, $\mathcal{D} : \begin{cases} x = d \\ y = \tan\theta z \end{cases}$ avec $\theta \in [0, \pi/2[$.
Cette droite coupe le plan d'équation $z = z_0$ en le point de coordonnées $(d, \tan\theta z_0, z_0)$ et les droites en rotation coupe ce plan selon un cercle centré sur (Oz) et de rayon $R = \sqrt{d^2 + \tan^2\theta z_0^2}$. La surface décrite par les droites en rotation est donc la surface d'équation $x^2 + y^2 = d^2 + \tan^2\theta z^2$ soit encore $x^2 + y^2 - \tan^2\theta z^2 = d^2$.
Si $\theta \in]0, \pi/2[$ alors il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe de révolution.
Si $\theta = 0$ alors il s'agit d'un cylindre de révolution.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit $2d = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$. En introduisant un repère dont l'origine est le milieu des pieds de la perpendiculaire commune, l'axe (Oz) est cette perpendiculaire commune et $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan (xOz), on a

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y = 0 \\ z = -d \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}' = \begin{cases} x = \tan\theta y \\ z = d \end{cases} \text{ avec } \theta \in [0, \pi/2[$$

Soit M de coordonnées x_0, y_0, z_0. On a

$$d(M, \mathcal{D})^2 = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = (z + d)^2 + y^2$$

et

$$d(M, \mathcal{D}')^2 = (z - d)^2 + (x\cos\theta - y\sin\theta)^2$$

Par suite

$$d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \Leftrightarrow \cos^2\theta(x^2 - y^2) - 2\sin\theta\cos\theta xy = 4dz$$

La réduction de la quadrique sous-jacente permet de conclure qu'il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique.
Notons que l'introduction d'un repère conservant la symétrie de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ aurait directement conduit à une forme réduite de l'équation.

Exercice 26 : [énoncé]
C'est un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 27 : [énoncé]
Soient A et B deux points parcourant les droites proposées : $A(t, a - t, 0)$ et $B(0, t', a)$.
On a $\overrightarrow{AB}(-t, t + t' - a, a)$. La droite (AB) est parallèle au plan $y + z = 0$ si, et seulement si, $t + t' = 0$.
La droite (AB) est alors déterminée par le paramétrage

$$\begin{cases} x = -\lambda t \\ y = -t - \lambda a \\ z = a + \lambda a \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par élimination, la surface balayée par les droites (AB) est celle d'équation $(z - a)(y + z - a) - ax = 0$.
C'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}A = \{0, 2, 3\}$.
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(i - j + k)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(-i + j + 2k)$.
Dans le repère orthonormé $(O; u, v, w)$, l'équation de la quadrique est :

$$2x^2 + 3y^2 + \sqrt{2}x + \frac{5}{\sqrt{3}}y + \frac{8}{\sqrt{6}}z + 3 = 0$$

Après translation d'origine, c'est un paraboloïde elliptique.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}A = \{-5, 0, 6\}$
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(i - 2j + k)$, $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(j + 2k)$, $w = \frac{1}{\sqrt{30}}(5i + 2j - k)$.
Dans le repère orthonormé $(O; u, v, w)$, l'équation de la quadrique est :

$$6x^2 - 5y^2 - \frac{5 - \alpha}{\sqrt{6}}x + \frac{\sqrt{30}(1 + \alpha)}{6}z = 1$$

Si $\alpha \neq -1$, on obtient un paraboloïde hyperbolique.
Si $\alpha = -1$, on obtient un cylindre de base la conique d'équation
$6x^2 - 5y^2 - \sqrt{6}x = 1$ qui après réduction est une hyperbole.

Exercice 30 : [énoncé]
La surface étudiée est une quadrique et la forme quadratique associée a pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Après réduction, on obtient

$$\mathrm{Sp}A = \{0, 14\}$$

et la forme quadratique a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right), \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - j) \text{ et } \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{60}}(3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k})$$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la surface a pour équation

$$y^2 + z^2 = 1$$

et c'est donc un cylindre d'axe $(O; \vec{u})$ et de rayon 1.